

## 1. Te shkruhen formulat adicionele dhe formulat qe shprehin Shumen e funksioneve trigonometrike ne prodhim

1.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (3)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (4)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} \quad (5)$$

Duke zëvendësuar  $\alpha + \beta = x$  dhe  $\alpha - \beta = y$  dhe duke zgjidhur këtë sistem të ekuacioneve sipas  $\alpha$  dhe  $\beta$ , nga formulat adicionele  $\sin(\alpha + \beta)$  dhe  $\sin(\alpha - \beta)$  marrim:

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

dhe

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.$$

## 2. Nxirrni formulën për shumezimin dhe fuqizimin e numrave kompleks në formën trigonometrike

2.

Le të jenë dhënë dy numra kompleksë në formën trigonometrike

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{dhe} \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2), r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2), \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (1) \end{aligned}$$

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)) \quad (2)$$

Nëse në barazimin (2) konsiderojmë  $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ , që d.m.th.  $r_1 = r_2 = \cdots = r_n$  dhe  $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n$ , atëherë marrim formulën për fuqizimin e numrit kompleks në formën trigonometrike:

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (3)$$

## 3. Tregoni se kur tre vektore janë linearisht të varur dhe vertetoni këtë pohim.

3.

Ngjashëm, tre vektorë  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  dhe  $\vec{a}_3$  janë linearisht të varur, atëherë dhe vetëm atëherë kur ata janë komplanarë.

Le ta vërtetojmë pohimin e fundit: Nëse dy nga tre vektorët  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  dhe  $\vec{a}_3$  janë kolinearë, atëherë vektorët  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  dhe  $\vec{a}_3$  janë komplanarë dhe linearisht të varur. Prandaj, konsiderojmë treshen e vektorëve  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  dhe  $\vec{a}_3$  çdo dy prej të cilëve janë jo kolinearë.

Nëse vektorët  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  dhe  $\vec{a}_3$  janë linearisht të varur, atëherë ekziston kombinimi linear zero

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0, \quad (1)$$

për të paktën njërin nga koeficientet e kombinimit linear  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  dhe  $\alpha_3$  të ndryshëm nga zero. Le të supozojmë për shembull se  $\alpha_3 \neq 0$ . Në këtë rast

#### 4. Perkufizoni prodhimin vektorial të dy vektoreve dhe shkruani vetite e prodhimit vektorial

4.

**Prodhimi vektorial** i vektorëve  $\vec{a}$  dhe  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \neq 0$ ,  $\vec{b} \neq 0$ ), quhet vektori, i cili shënohet me  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , dhe plotëson kushtet:

- Intensiteti  $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$  është i barabartë me syprinën e paralelogramit të ndërtuar mbi vektorët  $\vec{a}$  dhe  $\vec{b}$ ;
- Treshja e vektorëve  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  është treshë e djathtë;
- Vektori  $\vec{c}$  është normal në rrafshin e përcaktuar nga dy vektorët  $\vec{a}$  dhe  $\vec{b}$ . Në vazhdim do të vërtetojmë disa veti të rëndësishme të prodhimit vektorial.

Edhe disa veti të prodhimit vektorial të vektorëve po i marrim pa vërtetim.

$$2. \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad \text{vetia antikomutative;}$$

$$3. |\vec{a} \times \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|;$$

$$4. |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b};$$

$$5. \alpha (\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}), \quad \alpha \text{ është skalar;}$$

$$6. \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad \text{vetia distributive e prodhimit vektorial}$$

ndaj shumës së vektorëve;

#### 5. Shkruani ekuacionin e rrafshit në formën vektoriale, ekuacionin e rrafshit që kalon neper një pike dhe ekuacionin e rrafshit në formën segmente

5.

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0 \quad (1)$$

Relacioni (1) paraqet **ekuacionin vektorial** të rrafshit në hapësirë. M

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \quad (2)$$

Ekuacioni (2) quhet **ekuacioni normal i rrafshit**.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3)$$

Relacioni (3) shpreh **ekuacionin e rrafshit në formë segmente**.

## 6. Si njehet këndi ndërmjet dy rrafshesh?

6.

Kënd ndërmjet rrafshesh  $\alpha_1$  dhe  $\alpha_2$  quhet këndi ndërmjet vektorëve normal të tyre  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  dhe  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ . Pra

$$\cos \angle(\alpha_1, \alpha_2) = \cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

## 7. Shkruani dhe vertetoni formulën për rrethimin e numrit kompleks në formën trigonometrike

7.

$$z = r(\cos \varphi, \sin \varphi) \text{ dhe } w = \rho(\cos \theta, \sin \theta).$$

Në bazë të formulave të Muavrit kemi

$$\rho^n (\cos n\theta, \sin n\theta) = r^n (\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Prandaj

$$\rho^n = r^n \text{ dhe } n\theta = \varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \text{ dhe } \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

Rrjedhimisht

$$w_k = \left( \sqrt[n]{r} \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \sqrt[n]{r} \left( \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad (0 \leq k \leq n-1),$$

ose

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (0 \leq k \leq n-1). \quad (5)$$

## 8. Përkufizoni shumezimin e matricave dhe shkruani vetitë e shumezimit. Përfshijë llojet e matricash që mund të bëhen fuqizime matricash?

8.

**Përkufizimi 3.4** Le të jenë dhënë matricat  $A = (a_{ij})_{m \times p}$  dhe  $B = (b_{ij})_{p \times n}$ . Prodhimi i matricave A dhe B, quhet matrica  $C = (c_{ij})_{m \times n}$  elementet e së cilës plotësojnë barazimin:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad (i=1, 2, \dots, m \wedge j=1, 2, \dots, n)$$

Simbolikisht e shënojmë  $A \cdot B$ .

Nga përkufizimi i mësipërm shihet qartë se prodhimi i dy matricave mund të përkufizohet vetëm në rastin kur numri i shtyllave të matricës së parë është i barabartë me numrin e rreshtave të matricës së dytë.

$$9. A \cdot E = E \cdot A = A,$$

$$10. A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$$

$$11. A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

$$12. \alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B.$$

## 9.Shkruani formulat per kosinuset drejtimit te nje vektori ne hapësire dhe tregoni se si merrren ato formula

Le të jenë  $\alpha, \beta$  dhe  $\gamma$  këndet të cilët vektori  $\vec{a}$  i formon përkatësisht me boshtet  $O_x, O_y, O_z$ :  $\angle(\vec{a}, O_x) = \alpha$ ,  $\angle(\vec{a}, O_y) = \beta$ ,  $\angle(\vec{a}, O_z) = \gamma$ . Është e qartë se, në bazë të përkufizimit të funksioneve trigonometrike,  $a_1 = |\vec{a}| \cos \alpha$ ,  $a_2 = |\vec{a}| \cos \beta$ ,  $a_3 = |\vec{a}| \cos \gamma$ , që do të thotë se numrat  $a_1, a_2$  dhe  $a_3$  janë vlerat algjebrike të projektionit të vektorit  $\vec{a}$  në boshtet koordinative, ndërsa vektorët  $a_1 \vec{i}, a_2 \vec{j}$  dhe  $a_3 \vec{k}$  janë respektivisht projektionet e vektorit  $\vec{a}$  në boshtet koordinative. Meqë  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ , atëherë

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \cos \gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Funksionet  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  dhe  $\cos \gamma$  janë kosinuset e drejtimit të vektorit  $\vec{a}$  me boshtet koordinative. Është e evidente se

## 10.Tregoni se si nxjerret ekuacioni I rrafshit nga forma e pergjithshme ne formen segmente

10.

Le të jetë dhënë rrafshi  $\alpha$  me ekuacionin e tij në formën e përgjithshme

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0). \quad (1)$$

Ekuacioni i mësipërm mund të shkruhet në formën

$$Ax + By + Cz = -D$$

Duke pjesëtuar barazimin e fundit anë për anë me  $-D$  marrim:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1. \quad (2)$$

Duke shënuar  $-\frac{D}{A} = a, -\frac{D}{B} = b, -\frac{D}{C} = c$ , ekuacioni (2) merr formën

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3)$$

Relacioni (3) shpreh ekuacionin e rrafshit në formë segmente.

## 11. Si njehet distanca e pikes nga rrafshi?

11.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## 12. Perkufizoni prodhimin skalar të vektoreve dhe tregoni se si shprehet në koordinata. Shkruani disa zbatime të tij.

12.

Prodhim skalar të dy vektorëve  $\vec{a}$  dhe  $\vec{b}$  quajmë skalarin  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$  dhe e shënojmë  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . Pra,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi \quad (1)$$

ku  $\varphi (0 \leq \varphi \leq \pi)$  është këndi ndërmjet vektorëve  $\vec{a}$  dhe  $\vec{b}$ .

Le të jenë dhënë vektorët  $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$  dhe  $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$ . Duke zbatuar perkufizimin e prodhimit skalar të vektorëve dhe tabelën e shumëzimit skalar të vektorëve të bazës  $\vec{i}, \vec{j}$  dhe  $\vec{k}$  kemi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Nga shprehja e prodhimit skalar të vektorëve marrim

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$



## 9. ZBATIME TË PRODHIMIT SKALAR

1. Nëse  $\vec{a} \neq 0$  dhe  $\vec{b} \neq 0$ , atëherë nga përkufizimi i prodhimit skalar rrjedh

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ ku } \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b});$$

2. Kushti që dy vektorë  $\vec{a}$  dhe  $\vec{b}$  të jenë normalë

Është  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , atëherë dhe vetëm atëherë, nëse  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , për  $\vec{a} \neq 0$ ,  $\vec{b} \neq 0$ .

3. Njehsimi i intensitetit të vektorit

Nëse  $\vec{a} = \vec{b}$ , atëherë sipas përkufizimit të prodhimit skalar të vektorëve kemi

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2. \text{ Shkurt shkruajmë } \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2.$$

Nga barazimi i fundit marrim  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$

4. Projektioni i vektorit në bosht

Lë të jetë  $d$  një bosht i orientuar dhe  $\vec{e}$  një vektor njësi. Atëherë

$$\text{proj}_{\vec{e}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{e}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}| \cos(\vec{a}, \vec{e}) = \vec{a} \cdot \vec{e}, \quad |\vec{e}| = 1.$$

**13. Shkruani ekuacionin e rrafshit që kalon neper dy pika dhe eshte parallel me nje vector dhe tregoni se si merret ai.**

13.

**Zgjidhja:** Le të jenë  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  dhe  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  dy pika të dhëna dhe vektori i dhënë  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ . Është e qartë se vektorët  $\overrightarrow{P_1P_2}$  dhe  $\vec{a}$  janë komplanarë, rrjedhimisht prodhimi i përzier i vektorëve  $\overrightarrow{P_1P_2}$  dhe  $\vec{a}$  është zero. Pra,

$$(\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0 \text{ ose } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \blacksquare$$

**14. Përkufizoni matricen dhe veprimet me matrica**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Tabela drejtkëndëshe e përbërë nga  $m$  rreshta dhe  $n$ , që duket sikur në tabelën (2), quhet **matricë**. Tabela (2) quhet **matricë e sistemit (1)**.

Numrat realë  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) quhen **elemente të matricës**.

Në qoftë se matrica ka numër të barabartë rreshtash dhe shtyllash, ajo quhet **matricë katrore**. Pra, nëse  $m = n$  matrica shkurt shkruhet  $A = (a_{ij})_n$ .

**Përkufizimi 3.2** Le të jenë dhënë matricat e të njëjtit tip  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  dhe  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ . Shumë të matricave  $A$  dhe  $B$  quajmë matricën  $C$ , të tipit  $m \times n$ , me elemente që plotësojnë kushtin  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Simbolikisht e shënojmë  $C = A + B$ .

**Përkufizimi 3.3** Le të jetë  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  matricë dhe  $\alpha$  një skalar. Prodhim të matricës  $A$  me skalarin  $\alpha$  quajmë matricën  $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{m \times n}$ .

**Përkufizimi 3.4** Le të jenë dhënë matricat  $A = (a_{ij})_{m \times p}$  dhe  $B = (b_{ij})_{p \times n}$ . Prodhim i matricave  $A$  dhe  $B$ , quhet matrica  $C = (c_{ij})_{m \times n}$  elementet e së cilës plotësojnë

## 15. Formuloni dhe vertetoni teoremen per matricen inverse.

15.

**Teorema 8.1** Matrica  $A$  ka matricë inverse, atëherë dhe vetëm atëherë kur  $A$  është matricë regulare.

**Vërtetimi.** Supozojmë se  $A$  ka matricë inverse  $A^{-1}$ . Atëherë

$$A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0,$$

që d.m.th. se  $A$  është matricë regulare.

**Anasjelltas.** Supozojmë se  $\det A \neq 0$ . Tregojmë se matrica

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$$

është matricë inverse e matricës  $A$ . Vërtet

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot \left( \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A \right) = \frac{1}{\det A} \cdot (A \cdot \text{adj} A) = E.$$

Ngjashëm vërtetohet se  $A^{-1} \cdot A = E$ . Pra,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A.$$

## 16. Cka eshte nje matrice antisimetrike? Jep nje shembull

16.

Matrica  $A = (a_{ij})_n$  për të cilën vlen  $A = -A^T$  quhet **antisimetrike**.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ është antisimetrike. } \blacksquare$$

## 17. Cka paraqet gjeometrikisht prodhimi i perzier i tre vektoreve?

17.

## 14. PRODHIMI I PËRZIER I VEKTORËVE

**Prodhimi i përzier** i tre vektoreve  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  dhe  $\vec{c}$  quhet prodhimi skalar i vektorit  $\vec{a} \times \vec{b}$  me vektorin  $\vec{c}$ . Simbolikisht e shënojmë  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ . D.m.th. prodhimi i

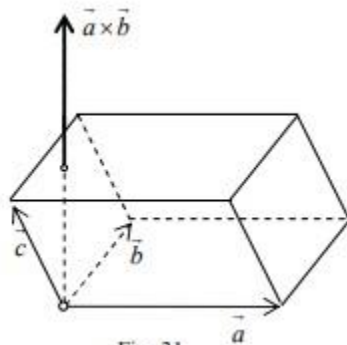


Fig. 31

## 18. Perkufizoni prodhimin vectorial te dy vektoreve dhe treogni se si shprehet ai kur vektoret jane dhene me koordinata

18.

**Prodhimi vektorial** i vektorëve  $\vec{a}$  dhe  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \neq 0$ ,  $\vec{b} \neq 0$ ), quhet vektori, i cili shënohet me  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , dhe plotëson kushtet:

- Intensiteti  $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$  është i barabartë me syprinën e paralelogramit të ndërtuar mbi vektorët  $\vec{a}$  dhe  $\vec{b}$ ;
- Treshja e vektorëve  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  është treshe e djathtë;
- Vektori  $\vec{c}$  është normal në rrafshin e përcaktuar nga dy vektorët  $\vec{a}$  dhe  $\vec{b}$ .

Në vazhdim do të vërtetojmë disa veti të rëndësishme të prodhimit vektorial.

## 13. SHPREHJA E PRODHIMIT VEKTORIAL NË KOORDINATA

Le të jenë dhënë vektorët  $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$  dhe  $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ . Duke zbatuar tabelën e mësipërme të shumëzimit të vektorëve të bazës  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  marrim:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

## 19. Vetite e determinantave

19.



Këtu do të japim vetitë themelore të përcaktorëve, pa bërë vërtetimin e tyre.

1.  $|A| = |A^T|$ ;
2. Në qoftë se çdo element i një rreshti (shtylle) të përcaktorit është zero, atëherë vlera e përcaktorit është zero.
3. Faktori i përbashkët i elementeve të një rreshti (shtylle) të përcaktorit mund nxirret para përcaktorit.
4. Në qoftë se ndërrojnë vendet cilëndo dy rreshta (shtylla) të një përcaktori, atëherë përcaktori ndërrohet shenjë.
5. Vlera e përcaktorit me dy rreshta (shtylla) identike është e barabartë me zero.
6. Në qoftë se një përcaktor ka cilëndo dy rreshta (shtylla) proporcionale, vlera e tij është e barabartë me zero.
7. Në qoftë se elementet e cilitdo rresht (shtyllë) paraqiten si shumë e dy elementeve, përcaktori mund të shkruhet si shumë e dy përcaktorëve.
8. Në qoftë se elementeve të një rreshti (shtylle) iu shtojmë elementet e një rreshti (shtylle) tjetër, të shumëzuar me një skalar, vlera e përcaktorit nuk ndryshon.

## 20. Vetite e Prodimit të perzier të vektoreve

20.

### 14.2 VETITË E PRODIMIT TË PËRZIER TË VEKTORËVE

1.  $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b};$
2.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b};$
3.  $(\alpha \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \alpha \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \alpha \vec{c}, \alpha$  është skalar.
4.  $[(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = (\vec{a}_1 \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a}_2 \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  vetia distributive.

## 21. Transformimet elementare të sistemeve të ekuacioneve lineare

21.

### 2. TRANSFORMIMET ELEMENTARE TË SISTEMEVE TË EKUACIONEVE LINEARE

**Përkufizimi 2.1** Le të jetë  $(S)$  një sistem i ekuacioneve lineare prej  $m$  ekuacionesh me  $n$  të panjohura. Transformime elementare të sistemit  $(S)$  quhen veprimet:

1. Ndërrimi i vendeve të ekuacioneve të një sistemi,
2. Shumëzimi i një ekuacioni të sistemit me një numër real të ndryshëm nga zero,
3. Shtimi një ekuacioni, një ekuacioni tjetër të shumëzuar me një skalar.

## 22. Varesia dhe pavaresia e vektoreve

22.

Lë të jenë dhënë vektorët  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t$  nga bashkësia e vektorëve  $V$ , dhe skalarët  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  nga bashkësia  $R$ . Shprehja e trajtës

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_t \vec{v}_t,$$

quhet **kombinim linear** i vektorëve  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t$ . Skalarët  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  quhen **koeficientet e kombinimit linear**.

Për vektorin  $\vec{v}$ , i cili mund të shkruhet në formën

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_t \vec{v}_t$$

thuhet se është **kombinim linear i vektorëve**  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t$ .

Nëse  $\vec{v} = 0$ , atëherë shprehja

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_t \vec{v}_t = 0.$$

quhet **kombinim linear zero**.

Vektorët  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t$  quhen **linearisht të pavarur**, nëse kombinimi linear zero

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_t \vec{v}_t = 0$$

vlen vetëm nëse  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_t = 0$ . Në të kundërtën vektorët quhen **linearisht të varur**.

— — —

## 23.Si njehset kendi ndermjet drejtezes dhe rrafshit?

23.

$$\sin \alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (1)$$

Formula (1) mundëson llogaritjen e këndit ndërmjet drejtëzës  $l$  dhe rrafshit  $\alpha$ .

## 24.Prodhimi I perzier I vektoreve

24.

### 14. PRODHIMI I PËRZIER I VEKTORËVE

**Prodhiimi i përzier** i tre vektorëve  $\vec{a}, \vec{b}$  dhe  $\vec{c}$  quhet prodhimi skalar i vektorit  $\vec{a} \times \vec{b}$  me vektorin  $\vec{c}$ . Simbolikisht e shënojmë  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ . D.m.th. prodhimi i përzier i vektorëve  $\vec{a}, \vec{b}$  dhe  $\vec{c}$  është prodhimi skalar i vektorit  $\vec{a} \times \vec{b}$  me vektorin  $\vec{c}$ . Rrjedhimisht, në bazë të përkufizimit del se prodhimi i përzier i tre vektorëve është skalar.

## 24.Formulat e kramerit

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \dots, x_n = \frac{d_n}{d}. \quad (2)$$

Formulat (2) njihen me emrin **Formulat e Kramerit** ose **Rregullat e Kramerit** për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare të tipit katror.