



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2023

MATHÉMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE - niveau supérieur

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

Durée : 4 heures

Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables

Total de points : 50 points

Consignes générales

Avant de débiter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages. Les réponses se font sur papier libre, à l'exception de celles demandées dans les espaces prévus à cet effet. À la fin de votre examen, rendre ce document avec votre travail.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont **obligatoires** ;
- puis **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Nombre de points obtenus : Problème 1 : sur 13 pts

Problème 2 : sur 13 pts

Problème 3 : sur 12 pts

Problème 4 : sur 12 pts

Problème 5 : sur 12 pts

Total : sur 50 pts

..... Note

Examineur-trice en charge de la correction : Date :

Remarque éventuelle :

.....

Problème 1 : Analyse (obligatoire, 13 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = (1 - x) \cdot e^{\left(x - \frac{x^2}{2}\right)}$ dont on donne :

- la dérivée $f'(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{\left(x - \frac{x^2}{2}\right)}$,
 - la dérivée seconde $f''(x) = (-x^3 + 3x^2 - 2) \cdot e^{\left(x - \frac{x^2}{2}\right)}$.
- a) Calculer les intersections du graphe de f avec les axes O_x et O_y . Donner le signe de f .
 - b) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes horizontales au graphe de f .
 - c) Établir que la dérivée de f est égale à $f'(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{\left(x - \frac{x^2}{2}\right)}$.
 - d) Étudier la croissance de f et donner les coordonnées de ses éventuels extremums.
 - e) Montrer que le graphe de f possède un point d'inflexion d'abscisse égale à 1. Déterminer les abscisses des deux autres points d'inflexion du graphe de f .
 - f) Représenter soigneusement le graphe de f dans un repère orthonormé.
 - g) Déterminer l'aire du domaine situé dans le premier quadrant et limité par la courbe $y = f(x)$ et par les axes O_x et O_y .

Problème 2 : Géométrie plane (obligatoire, 13 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne :

- les sommets d'un triangle ABC : $A(7; 3)$, $B(-1; 7)$, $C(-2; 0)$;
- le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

Suggestion : Représenter les différents éléments du problème. On ne doit pas y lire les réponses aux questions.

- a) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$ ainsi qu'une équation cartésienne de la médiatrice de $[AC]$.
- b) Calculer les coordonnées du centre I et le rayon r du cercle circonscrit au triangle ABC .
- c) Déterminer l'équation de la hauteur du triangle ABC issue de C .
- d) Calculer l'angle en A du triangle ABC .
- e) Calculer l'aire du triangle ABC .
- f) Déterminer par calcul les coordonnées du point D sur le cercle Γ tel que $ABCD$ soit un trapèze dont $[AB]$ est la grande base.

Problème 3 : Nombres complexes

(à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

Soit la fonction complexe f définie par $f(z) = (1 + i)z + 2 - 2i$.

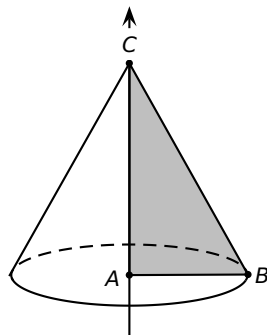
- Déterminer et représenter dans le plan de Gauss l'image du carré de sommets $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = i$.
- Déterminer le point invariant de f (la solution de l'équation $f(z) = z$).
- Donner une interprétation géométrique de f dans le plan de Gauss.
- Déterminer et représenter dans le plan de Gauss l'image par f de l'axe imaginaire.
- Résoudre l'équation $(f(z))^2 = -4$.
- Déterminer les valeurs des nombres complexes a et b de manière que la fonction $g(z) = a \cdot z + b$ corresponde dans le plan de Gauss à une rotation de 90° autour du point $c = 3 - 2i$.

Problème 4 : Optimisation

(à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

Les parties A et B de ce problème sont indépendantes.

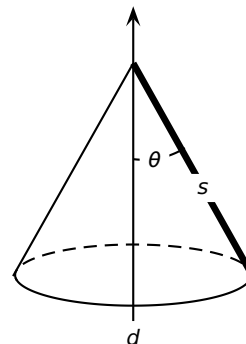
Partie A



Partie A

Un cône est obtenu par rotation du triangle ABC , rectangle en A , autour de la droite (AC) . La somme des longueurs des côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle est égale à 15. Déterminer les longueurs AB et AC pour lesquelles le volume du cône est maximal. Justifier que c'est bien un maximum. Donner ce volume.

Partie B



Partie B

Un cône \mathcal{C} est déterminé par la rotation d'un segment s de longueur 1 autour d'une droite d . Appelons θ l'angle entre d et s .

- Exprimer, en fonction de θ , le rayon R , la hauteur H et le volume V du cône \mathcal{C} .
- Montrer que le volume du cône \mathcal{C} peut s'exprimer en fonction de θ comme suit :

$$V(\theta) = \frac{\pi}{3} (\cos(\theta) - \cos^3(\theta)).$$

- Déterminer l'angle θ pour lequel le volume de ce cône est maximal. Justifier que c'est bien un maximum.

Problème 5 : Probabilités

(à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Alexandre décide de repeindre les six pièces de son appartement. Pour éviter des différences de tons, il choisit d'utiliser un pot de peinture de couleur différente pour chacune des pièces. Il se rend chez le célèbre marchand de peinture *Picarubens* où il achète six pots, tous de couleur différente : jaune, saumon, vert, bleu, blanc et beige.

- a) De combien de manières différentes peut-il repeindre son appartement, si l'on considère par exemple que la cuisine verte et la salle de bain bleue est différent de la cuisine bleue et la salle de bain verte ?
- b) S'il choisit les pots au hasard, quelle est la probabilité que sa cuisine soit peinte en jaune ?
- c) S'il a repeint sa cuisine en jaune, et qu'il choisit les cinq autres pots au hasard quelle est la probabilité que son salon ne soit pas peint en blanc ?

Chez *Picarubens* la peinture ne coûte pas très cher, mais la qualité laisse parfois à désirer. Il arrive hélas que la peinture d'un pot soit inutilisable avec une probabilité de 3%.

- d) Calculer la probabilité que deux des pots achetés par Alexandre soient défectueux.
- e) Calculer la probabilité qu'Alexandre achète au moins un pot de peinture défectueux.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de pots défectueux sur les six achetés.

- f) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette variable aléatoire X .
- g) Après les achats d'Alexandre, il reste encore 164 pots de peinture en stock chez *Picarubens*. À l'aide d'une approximation avec la loi normale, calculer la probabilité qu'entre 4 et 8 (y compris) soient défectueux.

On considère que la quantité de peinture contenue dans les pots de ce magasin suit une loi normale de moyenne 5 litres et d'écart-type 0,08 litre.

- h) Calculer la probabilité que le pot de couleur beige acheté par Alexandre contienne moins de 4,9 litres.